数理解析研究所講究録
434巻 1981年 118-133

拡散過程の縮約問題

京大理 長谷川 洋
水野 正彦

二種類の変数 $\{x_\mu,\ \mu=1,2,\cdots n\}$ および $\{y_i,\ i=n+1,\cdots,n+m\}$ に関する確率微分方程式(Itô 方程式)

$$dx_\mu(t)=[\alpha_{\mu i}(x(t))y_i(t)+v_\mu(x(t))]dt+dW^x_\mu(x(t),t) \qquad [A]$$

$$dy_i(t)=[-\gamma_{ij}(x(t))y_j(t)+b_i(x(t))]dt+dW^y_i(x(t),t) \qquad [B]$$

(添字 μ, i etc に関するテンソル和法に従う)

の時間的粗視化による y 変数の消去(t の粗いスケールで等価な x だけの方程式を求めること)の問題を扱う。前回(確率過程論と開放系の統計力学 II(1980年3月)講究録 405)における森氏および筆者の一人(長谷川)の稿の続論であるが、そこで問題となった'不一致点'を解明し、両者を統一する一般的な解答を用意する。すでに述べたように、この種の問題の数学的基礎は Papanicolaou, Strook, Varadhan の Martingale Approach 極限定理[1]に求められるが、物理の問題に適用しようとするならば収束因子 ε(統計物理で"smallness parameter"と呼ぶもの)

の入れ方を定めなければならず，[1]の理論はその方法までを指示するものではない。"不一致点"が現れるのは"εの入れ方の不統一"によるものであることが§1の所論で明らかとなる。いずれの立場にもそれぞれ物理的な根拠のあることであり，§2において1次元Ornstein-Uhlenbeck過程の実例でこのことを示そう。従って理論を満足のゆくものにするためには，与えられた方程式[A][B]それ自体に収束因子εを入れる論理が備わっている筈でそれを発見する必要がある。それは方程式[B]のドリフト関数$b_i(x)$の性質にかかっており，それを分解して[1]の方式にあてはまるようεを入れる方法が見出されることを§3において論ずる。

§1. Papanicolaou et al の極限定理における収束因子の入れ方の多様性

文献[1]で考察されたSDEは[A][B]よりもさらに一般的なものであり次のように書かれる。

$$dx_\mu(t) = \left[\frac{1}{\varepsilon}F_\mu^{(1)}(x(t), y(t)) + G_\mu^{(1)}(x(t), y(t))\right]dt + \sigma_\mu^{(1)}(x(t), y(t))\,dB^{(1)}(t)$$

$$dy_i(t) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}F_i^{(2)}(x(t), y(t)) + \frac{1}{\varepsilon}G_i^{(2)}(x(t), y(t)) + H_i^{(2)}(x(t), y(t))\right]dt + \left[\frac{1}{\varepsilon}\sigma_i^{(2)}(x(t), y(t)) + \sigma_i^{(3)}(x(t), y(t))\right]dB^{(2)}(t)$$

すなわち"driving過程"$y(t)$に対しても線形性を仮定せず極めて一般的な條件のもとに縮約"driven過程"$x(t)$の存在

を示そうというものである。yとxとの違い——すなわちyはxをdriveする——は収束因子εがyに対する方程式の右辺においてdrift項に$\frac{1}{\varepsilon^2}$ノイズ項に$\frac{1}{\varepsilon}$として入れられている所にある。$\varepsilon \to 0+$はyがxに較べ一段と速く運動することの表現である。その極限過程$x(t)$が安定に存在するための(十分)条件は次の通り:

(i) y-過程の(xの各点における)エルゴード性，すなわちxを固定して得られるy-方程式が$t \to \infty$で初期値によらぬ解$y(x)$をもつこと

(ii) centering condition $\langle F_i^{(1)}(x, y(t)) \rangle_\infty$

$$= \int F_i^{(1)}(x, y) \underbrace{\mu(x; dy)}_{x\text{を固定したときの}y\text{-過程の不変測度}} = 0$$

(iii) 係数F, G, H, σに関するx, yの関数としての正則性(いずれもC^∞かつ$R^n \times R^m$で有界)

以上の前提のもとに$\varepsilon \to 0+$の安定な極限過程$x(t)$の存在が言えて一定のItô SDEに従う(詳細は文献[1])。

以上の定理をわれわれのモデルSDE [A][B]に適用する場合に問題となるのが収束因子εの入れ方の問題であって，森氏の結果と筆者の結果の不一致が次のように具体的に示されるのである。

I. (筆者の結果 — 講究録405 記載)

$$dx_\mu(t) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\alpha_{\mu i}(x(t))\,y_i(t) + v_\mu(x(t))\right]dt \quad + dW^x_\mu$$
$$dy_i(t) = \left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\gamma_{ij}(x(t))\,y_j(t) + \underline{\underline{\frac{1}{\varepsilon}b_i(x(t))}}\right]dt \quad + \frac{1}{\varepsilon}dW^y_i$$

II. (森氏の結果)

$$dx_\mu(t) = \Big[\frac{1}{\varepsilon}\alpha_{\mu i}(x(t))\big(y_i(t) - (\gamma^{-1}b\,(x(t)))_i$$
$$+ (v + \alpha\gamma^{-1}b)_\mu(x(t))\Big]dt \qquad + dW^x_\mu$$

$$dy_i(t) = \left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\gamma_{ij}(x(t))\,y_j(t) + \underline{\underline{\frac{1}{\varepsilon^2}b_i(x(t))}}\right]dt \quad + \frac{1}{\varepsilon}dW^y_i$$

二重アンダーラインの部分に見られるように，IIにおいては y によらぬドリフト項 b 項を damping 項 $-\gamma y$ と同等のウエイトに見ているわけで，その結果エルゴード条件 (i) に現れる y の $t\to\infty$ での値が 0 と異る $\gamma^{-1}b\,(x(t))$ となっているわけである（それに対しIでは明らかに 0）。以上，うっかりすると'不毛の論争'になりかねない相違点を克服する数学としての手段を見出す，というのがわれわれの研究の主題である。それは次のような考察にもとづく。上の ε の入れ方 I，II は二つの両極端であって一般には両方が複合したものであるに違いない，そしてそれは次のように表現されるであろう。

ベクトル b の分解： $b_i(x) = \gamma_{ij}(x)\, y_j^\circ(x) + \bar{b}_i(x)$ (1)

それに対する ε の入れ方： $\dfrac{1}{\varepsilon^2}\gamma_{ij}(x)\, y_j^\circ(x) + \dfrac{1}{\varepsilon}\bar{b}_i(x)$ (2)

相当する SDE：

$$dx_\mu(t) = \Big[\frac{1}{\varepsilon}\alpha_{\mu i}(x(t))\big(y_i(t) - y_i^\circ(x(t))\big) + (v + \alpha y^\circ)_\mu(x(t))\Big]dt + dW_\mu^x \qquad (3)$$

$$dy_i(t) = \Big[-\frac{1}{\varepsilon^2}\gamma_{ij}(x(t))\big(y_j(t) - y_j^\circ(x(t))\big) + \frac{1}{\varepsilon}\bar{b}_i(x(t))\Big]dt + \frac{1}{\varepsilon}dW_i^y \qquad (4)$$

このモデルに対し前述の3条件[注] すなわち (i) y に関するエルゴード性 (ii) centering condition (iii) 係数の適当な正則性 が満されるならば $\varepsilon \to 0$ として得られる縮約過程 $x(t)$ がわれわれの求める結果に他ならない。従って問題は、如何に合理的にベクトル $b(x)$ を (1) のように分解するか、ということに還元されるわけである。（それは §3 であらためて議論しよう）

注　前稿（講究録405）で述べたことを簡単に summarize する

(i) $\langle dW_\mu^x(x(t),t)\, dW_\nu^x(x(t),t) \mid x(t)=x \rangle = 2L_{\mu\nu}^{xx}(x)\,dt$

$\langle dW_\mu^x(x(t),t)\, dW_i^y(x(t),t) \mid x(t)=x \rangle = 2L_{\mu i}^{xy}(x)\,dt$

$\langle dW_i^y(x(t),t)\, dW_j^y(x(t),t) \mid x(t)=x \rangle = 2L_{ij}^{yy}(x)\,dt$

L^{yy} が $m\times m$ 行列として正則で γ_{ij} が一様正値であれば $\gamma V + V\gamma' = 2L^{yy}$ から定まる分散行列 V が正則で (ii)の不変測度の分布（ガウス型）は

$$\varphi_0(y\,;x) = ((2\pi)^m \det V)^{-1/2} \exp\Big[-\frac{1}{2}(y-y^\circ)V^{-1}(y-y^\circ)\Big]$$ と定まる。

(ii) (3) のように ドリフト αy° をくくり出すことで centering condition が満される。

(iii) α, v, γ, b および L はすべて C^∞ 有界関数とする。

出発点の方程式［A］［B］を，モデル(3)，(4)にもとづき $\varepsilon \to 0$ の極限定理に従って，縮約した場合の縮約SDE（Itô型）

$$dx_\mu(t) = \left[\begin{array}{l} v_\mu(x(t)) + \alpha_{\mu i}\gamma_{ij}^{-1} b_j\,(x(t)) \\ \qquad - \alpha_{\mu i}\,\gamma_{ij}^{-1}\left(\frac{\partial y_j^\circ}{\partial x_\nu}\right)(v_\mu + \alpha_{\mu k} y_k^\circ)\,(x(t)) \\ + \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\alpha_{\mu i}\gamma_{ij}^{-1})\right)(\alpha_{\nu k} V_{jk} + 2 L_{\nu j}^{xy})\,(x(t)) \end{array} \right] dt$$

$$+ dW_\mu^x(x(t),t) + \alpha_{\mu i}\gamma_{ij}^{-1}(x(t))\, dW^y(x(t),t) \qquad (5)$$

これに対する Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t,x) \equiv \bar{L} p = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(-I_\mu(x) p)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\nu} L_{\mu\nu}^{xx} + (\alpha\gamma^{-1})_{\mu j}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\alpha V + 2L^{xy})_{\nu j}\right\} p \qquad (6)$$

ただし $I_\mu(x) = v_\mu(x) + (\alpha\gamma^{-1} b)_\mu(x) - (\alpha\gamma^{-1})_{\mu j}\left(\frac{\partial y_j^\circ}{\partial x_\nu}\right)(v_\mu + \alpha_{\mu i} y_i^\circ)(x)$

(7)

筆者の与えた結果および森氏の与えた結果は，それぞれモデルⅠおよびⅡにもとづくものであり，いずれも上の結果の特別な場合，すなわち

Ⅰ. $y_i^\circ(x) = 0 \qquad (\ \bar{b} = b\ )$

Ⅱ. $y_i^\circ(x) = \gamma_{ij}^{-1}(x)\, b_j(x) \qquad (\ \bar{b} = 0\ )$

の場合に他ならない。

§2. 1次元 Ornstein-Uhlenbeck過程の速度縮約の例

連立二元ランジュバン方程式

$$\dot{x} = u \tag{2.1}$$

$$\dot{u} = -\gamma u - \phi'(x) + r(t) \qquad \gamma > 0 \tag{2.2}$$

は，ポテンシャル $\phi(x)$ の中を運動する（単位質量）ブラウン粒子（位置 x，速度 u）の確率過程のモデルである。ガウス・白色ノイズ $r(t)$ に対し通常のごとく

$$\langle r(t) r(0) \rangle = 2\gamma kT\, \delta(t) \tag{2.3}$$

を仮定すると，二変数 (u, x) に関する分布 $p(t; ux)$ は次の Kramers 方程式に従う。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \underbrace{\gamma \frac{\partial}{\partial u}\left(u + kT \frac{\partial}{\partial u}\right) p}_{L_0 p} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(-up) + \frac{\partial}{\partial u}(\phi'(x) p)}_{L_1 p} \tag{2.4}$$

粒子の力学的ハミルトニアンは $H(u, x) = \frac{u^2}{2} + \phi(x)$ と書かれ，そのボルツマン分布

$$p_e(u\, x) \propto e^{-\frac{1}{kT} H(u, x)} = e^{-\frac{u^2}{2kT}} e^{-\frac{1}{kT}\phi(x)} \tag{2.5}$$

が形式的に (2.4) の定常解を与えることが確かめられる。また昔から知られている (2.1) (2.2) からの速度 u の縮約は

$$\dot{x} = -\frac{1}{\gamma}\phi'(x) + \frac{1}{\gamma} r(t) \tag{2.6}$$

および これに対する粗視化（coarse-grained）された分布に対する

Smoluchowski 方程式

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\gamma}\left(\phi'(x) + kT\frac{\partial}{\partial x}\right)p\right] \qquad (2.7)$$

に従うことがわかっている。その定常分布 $e^{-\frac{1}{kT}\phi(x)}$ は明らかに粗視化前の定常分布 (2.5) に対し compatible なものである。以上の事実をふまえ最近 (2.7) の縮約形の高次補正が求められた：

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{\phi''(x)}{\gamma^2}\right)\left(\phi'(x) + kT\frac{\partial}{\partial x}\right)p\right] \quad [2],[3] \qquad (2.8)$$

（これは $1+\frac{1}{\gamma^2}\phi''(x) > 0$ である限り有意義である）

この補正は，ドリフト $\frac{1}{\gamma}\phi'(x)$ とともに拡散係数 $\frac{kT}{\gamma}$ がともに $\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\phi''(x)\right)$ 倍される，ということであって，$e^{-\frac{1}{kT}\phi(x)}$ の定常分布であることがこの補正によって不変に保たれている。

しかしながら以上の結果は，その大前提に'ポテンシャル' $\phi(x)$ がブラウン粒子に対し束縛性のものであることが必要である（例えば調和振動子：$\phi(x) = \frac{\omega^2}{2}x^2$）。束縛性でない'ポテンシャル'のもっとも典型的な例として「一様な重力場」或いは「一様な電場」

$$\phi(x) = Fx \qquad \text{すなわち} \quad \phi'(x) = F \qquad (2.9)$$

があげられよう（その場合，$e^{-\frac{1}{kT}\phi(x)}$ は x の全範囲 $[-\infty, \infty]$ で規格化不能，ということが取り扱い不適切の唯一の根拠となる）。(2.9) のように $\phi'(x) = $ 定数 $(=F)$ の場合の Kramers 方程式の定常分布は

$$p_{st}(u, x) \propto e^{-\frac{1}{2kT}\left(u+\frac{F}{\gamma}\right)^2} \qquad (2.10)$$

で与えられることが簡単に確かめられる。以上より結論として

<u>1次元 O-U 過程 (2.1) (2.2) の速度縮約に対する収束因子</u>

I.
$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{1}{\varepsilon} u\, dt \\
du &= \left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\gamma u - \frac{1}{\varepsilon}\phi'(x)\right] dt + \frac{1}{\varepsilon}(2\gamma kT)^{1/2} dB(t)
\end{aligned}
$$

これは $\phi(x)$ が束縛性ポテンシャルの場合適切である。$\varepsilon \to 0+$ の

極限過程は

$$
dx = -\frac{1}{\gamma}\phi'(x)\, dt + \left(\frac{2kT}{\gamma}\right)^{1/2} dB(t)
$$

で与えられる。さらに $\varepsilon = 0+$ の極限に対する補正は ε のべき展開として書かれることが予想されるが，それは ($\varepsilon=1$ として) γ^{-1} のべき展開と一致し ε^n の項は $\gamma^{-(n+1)}$ ($n = 0, 1, 2 \cdots$) の項と一致する。

II.
$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{1}{\varepsilon} u\, dt \\
du &= \left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\gamma u - \frac{1}{\varepsilon^2}\phi'(x)\right] dt + \frac{1}{\varepsilon}(2\gamma kT)^{1/2} dB(t)
\end{aligned}
$$

これは $\phi'(x) =$ 定数 の場合にのみ適切である。

§1. の (1) のように，一般には $\dot{u} = -\gamma u + b + r$, $b(x) = \gamma u_0 - \phi'(x)$

すなわち
$$
\boxed{
\begin{aligned}
dx &= \frac{1}{\varepsilon} u\, dt \\
du &= \left[-\frac{\gamma}{\varepsilon^2}(u - u_0) - \frac{1}{\varepsilon}\phi'(x)\right] dt + \frac{1}{\varepsilon}(2\gamma kT)^{1/2} dB(t)
\end{aligned}
}
$$

であることが予想される（分解の具体的仕方については省略）。<u>$O(\varepsilon^2)$ までの縮約結果</u>

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t} = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(-u_0 - \frac{\varepsilon}{\gamma^2} u_0 \phi'' + \frac{\varepsilon^2}{\gamma^3} u_0^2 \phi'''\right) p\right] \\
& + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}\phi''\right)\left(\phi' + kT\frac{\partial}{\partial x}\right) p\right]
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

となる。

§3. ドリフト・ベクトルの分解問題

§1で必要となった，ベクトル b を ε^{-2} を入れる部分 γy° と ε^{-1} を入れる部分 $\bar{b}$ とに分解する問題を考察する。これは以下に述べる事実の応用問題である。

proposition　　Itô 方程式

$$dx_\mu(t) = b_\mu(x(t))\,dt + \sigma_{\mu i}(x(t))\,dB_i(t) \qquad (3.1)$$

に従う n 次元拡散過程を考える。Ω を R^n の有界領域とし

$$\sigma_{\mu i}(x)\,\sigma_{\nu i}(x) \equiv 2a_{\mu\nu}(x) \qquad b_\mu(x),\ a_{\mu\nu}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

$$a_{\mu\nu}(x)\,\xi_\mu\xi_\nu \geq a\,\xi_\mu\xi_\mu \qquad a>0 \qquad (3.2)$$

とすると Ω 上で拡散過程はエルゴード的，すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Lf = b_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + a_{\mu\nu}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \quad Lf=0 \Rightarrow f=1\times\text{const.}$$

であるが generator L は次のような二部分に一意に分解される：

$$L = L_0 + \bar{L} \qquad L_0 f = j_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \qquad (3.3)$$

$$\bar{L}f = \rho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\rho\, a_{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\right) \qquad (3.4)$$

ただしベクトル j スカラー ρ (確率密度) は次の條件を満す

(i)　$\operatorname{div} j \left(= \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}\right) = 0$

(ii)　$\rho,\ \frac{\partial \rho}{\partial x_\mu} \in L^1(\Omega)$，$\inf_{x\in K}\rho(x)>0$ $\forall K$ compact $\subset \Omega$

$\rho,\ \nabla\rho = 0 \quad x\in\partial\Omega.$

分解の物理的意義　(3.3)(3.4) で特に $f(x) = x_\mu$ ならば

$$b_\mu(x) = j_\mu(x) + \bar{b}_\mu(x) \qquad (3.5)$$

$$\mathrm{div}\, j \left(= \frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu\right) = 0, \quad \bar{b}_\mu = \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\rho\, a_{\mu\nu}) \qquad (3.6)$$

となる。すなわち Itô 方程式のドリフト項は divergence が 0 となる '流れ' の部分と単一のスカラー関数 $\rho(x)$ の gradient の部分とに分解される。$\rho(x)$ は(有界)領域 Ω においてその境界 $\partial\Omega$ 上を除き到る所正値となる確率密度関数の性質をもち, $j = 0$ のときの系の不変測度分布(密度)に相当する。j_μ は運動の「純力学的」な部分, $\bar{b}_\mu$ は「散逸的」な部分を表わし, 上に指定した境界条件($\rho = 0$, $\partial\Omega$)より

$$\langle b_\mu \rangle_\rho = \langle j_\mu \rangle_\rho \quad \text{すなわち} \quad \langle \bar{b}_\mu \rangle_\rho = \int \bar{b}_\mu(x) \rho(x)\, dx = 0 \qquad (3.7)$$

である。(ガウスの公式より $\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\rho\, a_{\mu\nu})\, dx = \int_{\partial\Omega} \rho\, a_{\mu\nu}\, dA_\nu = 0$)

SDE [A][B] の縮約問題への適用　(1)式すなわち

$b_i = \gamma_{ij}\, y^\circ_j + \bar{b}_i$ において (3.6)に対応し

$$\mathrm{div}\, \alpha y^\circ \left(= \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\alpha_{\nu i} y^\circ_i)\right) = 0, \qquad (3.8a)$$

$$\bar{b}_i = \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\rho(\alpha V + 2L^{xy})_{\nu i}\right), \quad \rho = 0 \ \partial\Omega \qquad (3.8b)$$

を要求して y°, ρ が一義的に定められるならば, それが合理的な分解の仕方である。なぜなら, このときにも (3.7) が成立し, y° が driving process y の persistent な値を与えることになるから。

そして，(3.8b)を(6)に代入することにより縮約過程のFokker-Planck方程式が

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(-\bar{I}_\mu(x)p\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(L^{xx}_{\mu\nu}(x)p\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[a_{\mu\nu}(x)\left(p\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\log p - \log P)\right)\right] \qquad (3.9)$$

$$\bar{I}_\mu(x) = \left(\delta_{\mu\nu} - (\alpha g^{-1})_{\mu j}\frac{\partial y^0_j}{\partial x_\nu}(v_\nu + \alpha_{\nu i} y^0_i)\right)(x) \qquad (3.9a)$$
$$a_{\mu\nu} = \alpha_{\mu i} g^{-1}_{ij}(\alpha_{\nu k} V_{jk} + 2L^{xy}_{\nu j}) \qquad (3.9b)$$

となって，$\bar{I}_\mu = 0$ $(v + \alpha y^0 = 0)$ $L^{xx}_{\mu\nu} = 0$ $(dW^x_\mu = 0)$，すなわちdriven過程固有の運動およびノイズが不在の場合の縮約過程の定常分布が P と一致することになるからである。

以下，前出のpropositionの証明を行う。これは次のように言い換えられる。

<u>proposition′</u>　Itô方程式(3.1)に従う n 次元拡散過程において，ドリフト・ベクトル b は条件(i)(ii)に従うベクトル j およびスカラー P を用い

$$b_\mu = j_\mu + P^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(P a_{\mu\nu}) \qquad (3.10)$$

のように一意に分解される。

[証明の方針]　$\mathrm{div}\, j = 0$ の條件は $\log P$ に対する楕円型二階偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(a_{\mu\nu}\frac{\partial \log P}{\partial x_\nu}\right) = \frac{\partial \tilde{b}_\mu}{\partial x_\mu} \qquad \tilde{b}_\mu = b_\mu - \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \qquad (3.11)$$

によって表わされる。領域 Ω における前提條件(3.2)より，

そのDirichlet型境界値問題は一般的には一意解を与える筈であるが，今の場合 $\boxed{\partial\Omega \text{ で } \rho = 0 \text{ は } \log\rho = -\infty \text{ を意味する}}$ ので，この点を疑義なく確立する必要がある。以下の議論は最近の <u>Dirichlet形式と distorted Brownian motion の理論</u>（S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn and L. Streit [4], M. Fukushima [5] [6]）と <u>Dirichlet形式の変分原理</u>（田辺広城「発展方程式」岩波数学選書）とに基くものである。簡単のため拡散過程の generator が $\Delta + b(x)\nabla$（ラプラシアン＋ドリフト）の場合に限定する（拡散係数 $a_{\mu\nu}$ が一様正値の場合これと本質的に同じ）。

<u>第一段</u>（Albeverio, Hoegh-Krohn, Streit [4]）　$\mathcal{E}(u, v)$ を $C_0^1(\Omega) \times C_0^1(\Omega) \longrightarrow R$: $\mathcal{E}(u, v) = \int_\Omega \nabla u \, \nabla v \, d\mu$（$\mu$: 正 Radon measure on Ω（R^n の<u>有界</u>領域 ー 安全のため）Lebesgue mea. に関し絶対連続）なる双一次形式とする（Markovian, local, regular symmetric form [6]）。これが $L^2(\Omega; d\mu)$ 上の closable form であるためには ∇ が $L^2(\Omega; d\mu)$ 上の closable operator であれば十分であり，そのためには $d\mu = \rho(x)dx$ として（$\rho(x)$ は μ の分布）

(ii)　$\log\rho \in D(\nabla)$（$L^2(\Omega; d\mu)$ 上 ∇ の定義域 $\supset C_0^\infty(\Omega)$ dense in $L^2(\Omega)$）
すなわち　$\int_\Omega (\nabla \log\rho)^2 \rho \, dx < \infty$　又は

(ii′)　$\rho, \nabla\rho \in L^1(\Omega)$, $\inf_{x \in K} \rho(x) > 0$　$\forall K$ compact $\subset \Omega$ [5]

ここでは更に ρ に関する（境界）条件として $\rho|_{\partial\Omega} = 0$ の場合を扱う。これと $\log\rho \in D(\nabla)$ とを両立させるため

(ii)″ $\quad \rho,\ \nabla\rho,\ (\nabla\rho)(\log\rho)^2\big|_{\partial\Omega} = 0$

を仮定する。 このとき $\mathcal{E}(u,v)$ の smallest closed extension

$$\bar{\mathcal{E}}(u,v)\ :\ u,v\in D(\bar{\nabla}) = W_2^1(\Omega;d\mu) = H_1(\Omega;d\mu)\left(\begin{array}{c}\text{ノルム } \|\ \|_1 \\ = \left[\int_\Omega((\nabla\cdot)^2+(\cdot)^2)\rho\,dx\right]^{1/2} \\ \text{による Hilbert 空間}\end{array}\right)$$

が得られる。 そして

$$-\mathcal{E}(u,v) = \int_\Omega u(Av)\rho\,dx,\quad Av = \Delta v + (\nabla\log\rho)\nabla v.$$

<u>第二段</u> isometry $L^2(\Omega;d\mu) \Longleftrightarrow L^2(\Omega;dx)$ [4]

(連続写像)

$$u \xrightarrow{T_\rho} \psi = \sqrt{\rho}\,u \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\psi \xleftarrow{T_\rho^{-1}} \psi \qquad \int_\Omega u^2\rho\,dx = \int_\Omega \psi^2 dx$$

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_\Omega \nabla u\nabla v\,\rho\,dx = \int_\Omega(\nabla\psi\nabla\varphi + \lambda(x)\varphi\psi)\,dx$$

$$\lambda(x) \equiv \rho^{-1/2}(\Delta\rho^{1/2})(x) \in L^1(\Omega;d\mu)$$

<u>境界の特異性による分類</u> ($C_0^1(\Omega)$, $C^1(\Omega)$ の $\|\ \|_1$ 完備化をそれぞれ $\mathring{H}_1$, H_1 とし)

$$u \longrightarrow T_\rho u \qquad |u|_{\partial\Omega} < \infty \longrightarrow |T_\rho u|_{\partial\Omega} = 0;\ T_\rho u \in \mathring{H}_1(\Omega;dx)$$

$$\psi \longrightarrow T_\rho^{-1}\psi \qquad |\psi|_{\partial\Omega} > 0 \longrightarrow |u| = |T_\rho^{-1}\psi|_{\partial\Omega} = \infty;\ \psi\in H_1(\Omega;dx)$$

故に
$$T_\rho^{-1}\mathring{H}_1(\Omega;dx) = \{u\in H_1(\Omega;d\mu)\ |\ |u|_{\partial\Omega}\leq\infty,\ T_\rho u|_{\partial\Omega} = 0\}$$
$$T_\rho^{-1}H_1(\Omega;dx) = \{u\in H_1(\Omega;d\mu)\ |\ |u|_{\partial\Omega} = \infty,\ |T_\rho u|_{\partial\Omega} \geq 0\}$$

従って
$$\mathring{H}_1(\Omega;d\mu) \equiv T_\rho^{-1}\mathring{H}_1 \cap T_\rho^{-1}H_1 = \{u\in H_1(\Omega;d\mu)\ |\ |u|_{\partial\Omega} = \infty,\ T_\rho u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

は $H_1(\Omega;d\mu)$ の閉部分空間である。 これより次の結論を得る。

<u>変分原理</u>
$$\min_{u\in\mathring{H}_1(\Omega;d\mu)}\left[\frac{1}{2}\mathcal{E}(u,v) - (b,\nabla u)\right] \qquad b\in C^\infty(\bar{\Omega})\subset D(\nabla)$$

は $\mathring{H}_1(\Omega;d\mu)$ において、<u>境界條件を含め次の方程式の一意解</u>

$$\boxed{\nabla(\rho\nabla u) = \nabla(b\rho) \qquad u|_{\partial\Omega} = -\infty \quad \sqrt{\rho}\,u|_{\partial\Omega} = 0}$$

を許容する。 $\inf_{x\in K} P > 0$ $\forall K$ compact $\subset \Omega$ の條件より $\forall K$ compact $\subset\Omega$ で $u \in W^1_\infty$ ($|u|, |\nabla u|$ essentially bounded) すなわち $u \in W^1_2 \cap W^1_\infty$. これより e^u が P と同じ性質の密度関数となり得る（詳細略）。

第三段 分解 (3.5)(3.6) ― ただし $a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ― すなわち

$$C^\infty(\bar{\Omega}) \ni b_\mu(x) = j_\mu(x) + \bar{b}_\mu(x)$$

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad \bar{b}_\mu = P^{-1}\frac{\partial P}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\log P \qquad \begin{aligned} P(x) &> 0 \quad x \in \Omega \\ &= 0 \quad x \in \partial\Omega . \end{aligned}$$

各 b_μ に対し この條件を満す ベクトル $\bar{b}$ とスカラー P があれば

$$\Delta \log P = \nabla b \qquad |\log P| < \infty \text{ in } \Omega, \quad \log P = -\infty \text{ in } \partial\Omega .$$

逆に これを満す $u = \log P$ があれば 上の分解が成立する。従って問題は Poisson 型方程式

$$\Delta u = \nabla b \qquad x \in \Omega \qquad u = -\infty \qquad x \in \partial\Omega \tag{3.12}$$

の解の存在とその一意性の証明に帰着する。以下証明の方針

境界値問題 (3.12) は 前段で述べた $\nabla(P\nabla u) = \nabla(bP)$ $u|_{\partial\Omega} = -\infty$ に於いて形式的に $P = 1$ としたものである。そこでの P は $\inf_{x\in K} P(x) > 0$ $\forall K$ compact $\subset\Omega$ $P = 0$ on $\partial\Omega$ を満すものであった（$P, \nabla P \in L(\Omega, dx)$ のほかに）。これを admissible class (P_{ad}) で示す。

$\{P_n(x)\} \subset (P_{ad})$, 各 P_n に対し $\nabla(P_n \nabla u) = \nabla(b P_n)$ $u|_{\partial\Omega} = -\infty$ の一意解を u_n とする。 $\text{s-}\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 1$ $x \in \Omega$ ($W^1_1(\Omega, dx)$ ノルム) ならば $\text{w-}\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ ($W^1_2(\Omega)$ ノルム) $\in W^1_2 \cap W^1_\infty$ である。

この極限関数 $u(x)$ は $e^{u} \in (P_{ad})$ であり次の意味で (3.12) の一意解とみることが出来る：

$$\Delta u = \nabla b \qquad x \in \forall K \text{ compact} \subset \Omega \qquad |u| < \infty \quad \partial K$$
$$u|_{\partial\Omega} = -\infty.$$

アンダーライン部分の説明

(1) 方程式 $\nabla(\rho\nabla u)(\equiv L_\rho u) = \nabla(b\rho)$ の解の compact $K\subset\Omega$ での性質. $L_\rho u = 0$ は $\mathring{H}_1(K;d\mu)$ で $u=0$, $H_1(\Omega;d\mu)$ で $u=\text{const.}$ が一意解. 後者に対しては $\int_\Omega 1\cdot \nabla(b\rho)\,dx = 0$ より, $u = L_\rho^{-1}(\nabla(b\rho))$ は const. を除いて一意に定まり $u|_{\partial\Omega} = -\infty$, $\sqrt{\rho}\,u|_{\partial\Omega} = 0$, に対し $|u|_{\partial K}$ ($\forall K \Subset \Omega$) $< \infty$。以下ある compact K で考える。$u(x) = (L_\rho^{-1}(x), v_\rho)$ ($v_\rho \equiv \nabla(b\rho)$), すなわち $u = L_\rho^{-1} v_\rho$ の各点での値を Dirichlet 内積で与える L_ρ^{-1} の表現 $L_\rho^{-1}(x)$ が存在し, x の関数として $\in W^1_\infty(K)$。

(2) $\rho_n \in (P_{ad})$, $\rho_n \to 1$ (強, $W^1_1(\Omega)$ ノルムで) とするとき, $L^{-1}_{\rho_n}$ は K で一様有界 ($\|L^{-1}_{\rho_n}\| < M$). また $v_{\rho_n} \to \nabla b$ (強. $W^1_1(K)$ ノルムで). このことから $u_n = L^{-1}_{\rho_n} v_{\rho_n}$ の弱収束 ($W^1_2(K)$ での) が示される。

以上.

文献

[1] G. C. Papanicolaou, D. Stroock and S. R. S. Varadhan, Duke Univ. Press (1977).

[2] U. M. Titulaer, Physica 91A (1978) 321; 100A (1980), 251.

[3] M. San Miguel and J. M. Sancho, J. Stat. Phys. 22 (1980), 605.

[4] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn and L. Streit, J. M. Phys. 18 (1977), 907.

[5] M. Fukushima, 「量子ダイナミックスにおける解析的方法」(1981) 名大

[6] 福島正俊「ディリクレ形式とマルコフ過程」紀伊國屋 (1975)